前缀和

前缀和就是数组前 i 项之和，主要作用是**能快速求出 区间和**

下标 : 1 2 3 4 5

$a[5]$: 2 4 3 5 8

前缀和数组: 2 6 9 14 22

为了便于计算，数组下标一般从 1 开始，能得到

一维数组前缀和公式：

$$sum[i] = sum[i-1] + a[i]$$

```
    //构造前缀和数组
    for(int i = 1 ; i <= n ; i++){
        cin >> a[i];
        sum[i] = sum[i - 1] + a[i];
    }
```

对一维数组区间求和:

求区间 $[l,r]$ 的数值之和， 一般的方法是从 l 遍历到 r 求总和

> 比如求上面数组 $[2,4]$ 的区间和， $SUM = 4+3+5 = 12$

但有了前缀和数组，只需要用 前 r 个数的总和减去前 $l-1$ 个数的总和

> $[2,4]$ 的区间和 ， $SUM = sum[4] - sum[1] = 14 - 2 = 12$

一维数组区间和公式：

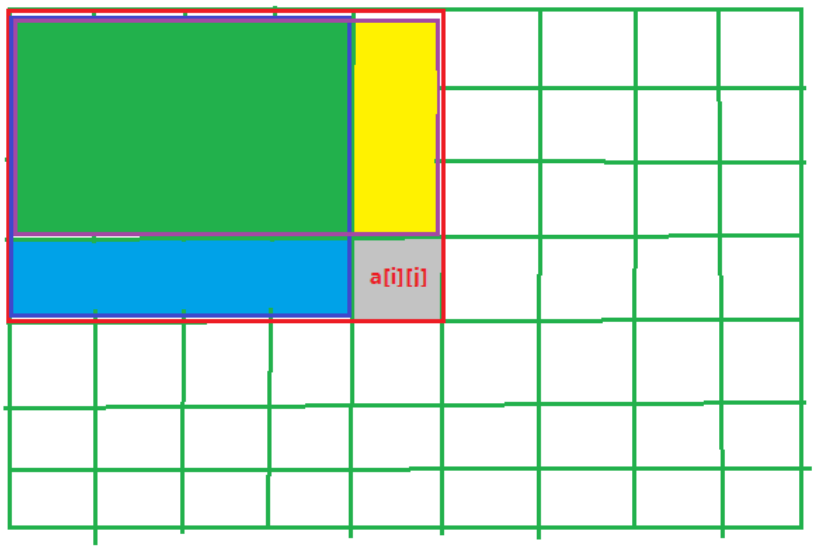
$$sum[l,r] = sum[r] - sum[l-1]$$

当然，有一维的，还有二维数组的前缀和，用于求子矩阵的和

二维数组前缀和公式：

$$sum[i][j] = sum[i-1][j] + sum[i][j-1] - sum[i-1][j-1] + a[i][j]$$

解释一下：



红色框代表$sum[i][j]$，蓝色+绿色部分代表$sum[i][j-1]$，黄色+绿色部分代表$sum[i-1][j]$

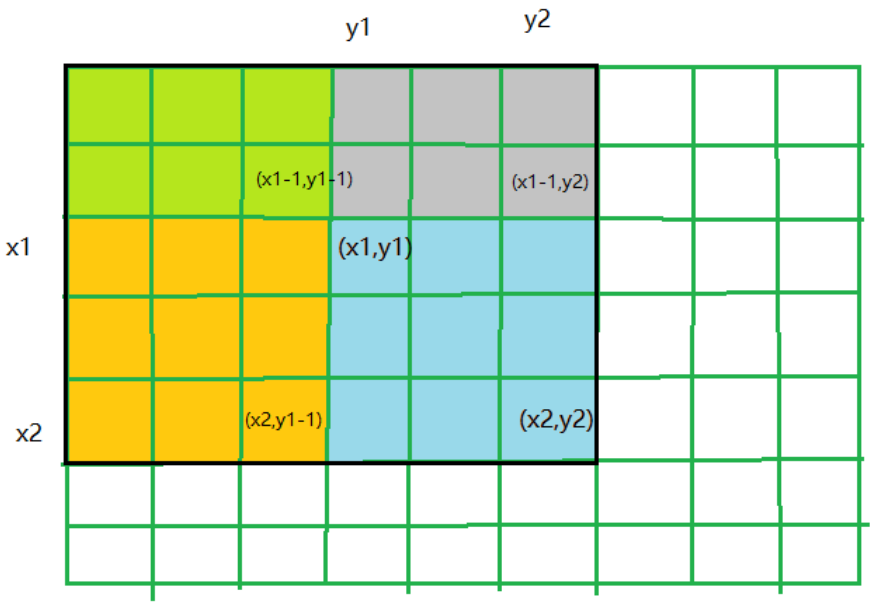
绿色部分代表$sum[i-1][j-1]$

结合公式看图就能理解了。

怎么利用二维前缀和数组求子矩阵和呢

二维数组子矩阵求和公式：

$$sum[(x1,y1),(x2,y2)] = sum[x2][y2] - sum[x1-1][y2] - sum[x2][y1-1] + sum[x1-1][y1-1]$$



给出$(x1,y1)$和$(x2,y2)$，求子矩阵和（也就是蓝色区域面积），结合公式看图理解。

例题：

最大子序和

K倍区间

激光炸弹

差分

差分指的就是当前值与前一个值的差值　(学的高数中有差分方程的概念，所以你们是接触过的)

下标	:	1	2	3	4	5
$a[5]$	:	2	6	9	14	22
差分数组	:	2	4	3	5	8

比较发现：a[5]相当于差分数组的前缀和数组

一维数组差分公式：

$$b[i] = a[i] - a[i-1]$$

```
    //构造差分数组（方法1）
    for(int i = 1 ; i <= n ; i++){
        cin >> a[i];
        b[i] = a[i] - a[i-1];
    }
```

后面还有另一种构造差分数组的方法

主要作用：快速处理区间加减操作

> 将对原序列的区间操作转换为对差分数组的单点操作

一般做法，遍历$[l, r]$

> 比如：我对 $[2, 4]$ 进行 $+1$ 操作，就是给$a[2], a[3], a[4]$ 都$+1$

利用差分数组，只需要给$b[l] + c$, $b[r + 1] - c$ 就好了

> $[2, 4]$进行+1操作， 给b[2] +1， b[5] - 1 就好了

好处就是，如果有多次区间加减操作，我们不需要多次遍历数组，只需要对差分数组进行单点操作，最后只需要给差分数组求一下前缀和，就能获得多次区间加减操作后的$a[]$

我们可以把这步写成函数，之后调用就好了

一维数组差分加减操作：

```
//[l, r]区间进行加减操作(c为操作值)
void insert(int l , int r , int c){
    b[l] += c;
    b[r + 1] -= c;
}
```

假设 a ,b数组 一开始都为0 ， 那么输入a[i]是不是相当于对区间 $[i,i]$ 加上$a[i]$

那么就可以利用上面的函数构造差分数组

```
    //构造差分数组（方法2）
    for(int i = 1 ; i <= n ; i++){
        int x;
        cin >> x;
        insert(i, i, x);
    }
```

这样就将构造差分数组和进行加减操作都用一个函数来进行。

相应的还有二维差分

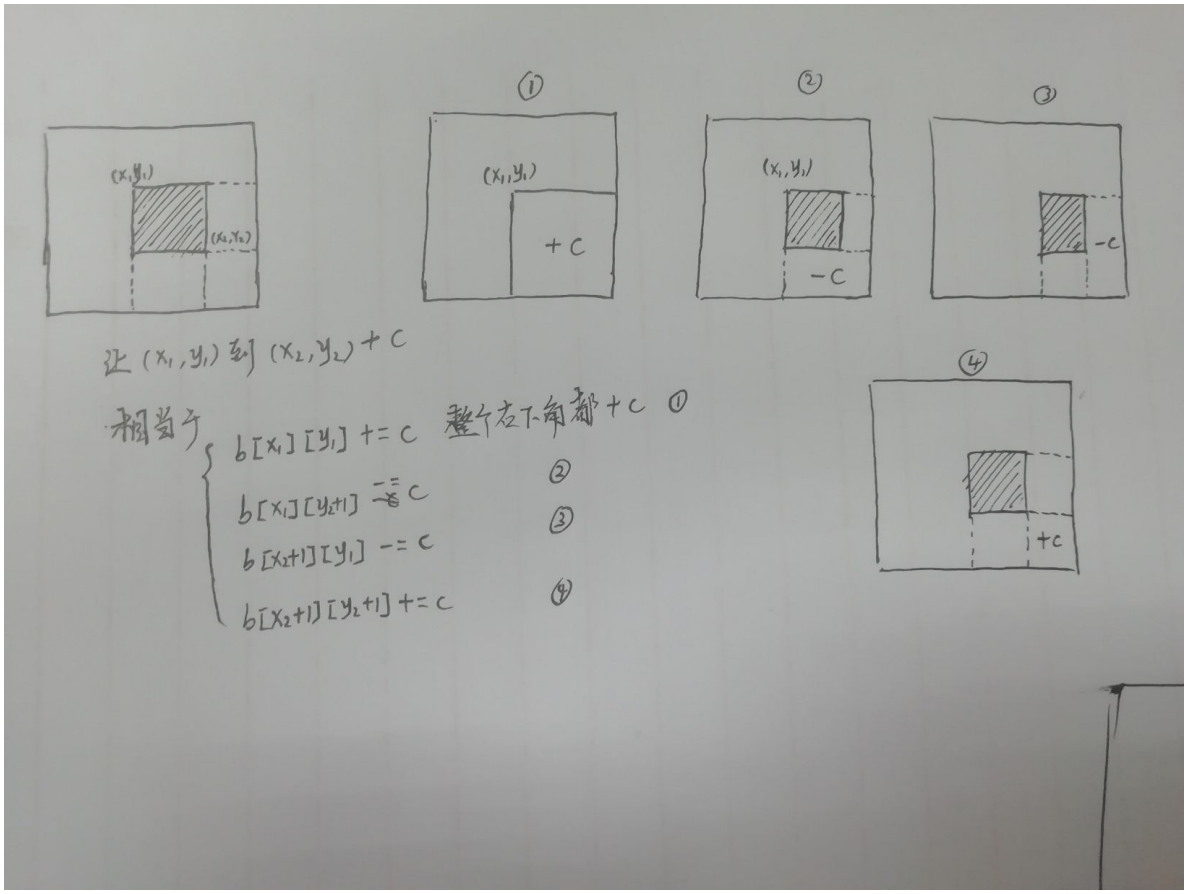
二维差分操作:

```
void insert(int x1,int y1,int x2,int y2,int c){
    b[x1][y1] += c;
    b[x1][y2+1] -= c;
    b[x2+1][y1] -= c;
    b[x2+1][y2+1] += c;
}

```

利用上面的函数，可以完成二维差分方程的构造以及各种操作

解释如下图:



例题：

AcWing 797.差分

IncDec Sequence

双指针（two pointers）

> 和上面两个一样，双指针算法也是一种思想，一种技巧，非常重要，我们也会经常用到双指针算法，比如归并排序中的区间合并，快速排序，还有我们熟悉的二分算法，都用到了双指针。

双指针,顾名思义，就是利用两个数组下标i，j，来代替原来一个数组下标遍历整个数组，以优化时间复杂度。

一般的写法

```
    for (int i = 0, j = 0; i < n ; i++)
    {
        while(j < i && check(i , j))
            j++;

        //然后是具体问题的分析

    }
```

例题： 输入一个英文句子，将每个单词单独作为一行输出。

代码：

```cpp
#include <algorithm>
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <string>
using namespace std;
const int MA = 1e5 + 5;

int main()
{
    string str;
    getline(cin, str);
    int n = str.length();
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        int j = i;
        while (j < n && str[j] != ' ')
            j++;
        //具体问题分析
        for (int k = i; k < j; k++)
            cout << str[k];
        cout << endl;
        i = j;
    }
    return 0;
}
```

最长连续不重复子序列

给定一个长度为n的整数序列，请找出最长的不包含重复的数的连续区间，输出它的长度。

输入格式

第一行包含整数n。

第二行包含n个整数（均在0~100000范围内），表示整数序列。

输出格式

共一行，包含一个整数，表示最长的不包含重复的数的连续区间的长度。

数据范围

$1 \leq n \leq 100000$

输入样例：

```
5
1 2 2 3 5
```

输出样例：

```
3
```

完整代码：(分析在下面)

```cpp
#include<iostream>
#include <algorithm>
#include <cstdio>
#include<map>
using namespace std;
const int MA = 1e5 + 5;
int a[MA];
map<int,int> mp; //存每个值的个数
int main()
{
    int n;
    cin >> n;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
    {
        cin >> a[i];
    }
    int ans = 0;
    for (int i = 0, j = 0; i < n; ++i)
    {
        mp[a[i]]++;
        while (j < i && mp[a[i]] >= 2)
        {
            mp[a[j]]--;
            j++;
        }
        ans = max(ans, i - j + 1);
    }
    cout << ans << endl;
    return 0;
}
```

暴力的做法：

```cpp
//暴力做法，时间复杂度O(n^2)
for(int i = 0 ; i < n ; i++)
{
    for(int j = 0 ; j <= i ; i++){
        if(check(j , i))
            ans = max(ans, i - j + 1);
    }
}
```

> 暴力的做法就是用i 作为子序列右端，用j 作为子序列左端， 判断是否满足条件，即从j 到 i 元素是否都只有1个，如果满足条件，更新结果。

双指针算法：

```
//双指针算法，时间复杂度O(n)
for(int i = 0 , j = 0 ; i < n ; i++)
{
    //check(j , i)为判断j到i之间是否有相同元素，有的话，j++
    while(j <= i && check(j , i))
        j++;
    ans = max(ans, i - j + 1);
}
```

> 大概思路：用i 指针将元素加进来， 用 j 指针来判断数组，不满足条件就去掉该元素 ，j++

双指针算法如果想了解更多的话，去搜一些博客看看，然后找一题练一下。

例题：

完美序列

日志统计